

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

线性代数笔记19——格拉姆-施密特正交化

标准正交矩阵

标准正交向量

有一堆向量， $q_1, q_2, \dots, q_n$ ，它们两两正交，这意味着这些向量满足：

$$q_i \cdot q_j = q_i^T q_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

一个向量没法和自己正交，在 $i = j$ 时，让 $q_i^T q_i = 1$ ，这相当于 q_i 模长等于1：

$$q_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$
$$q_i^T q_i = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$$
$$\|q_i\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = 1$$

向量的转置乘以自身等于1，意味着这个向量是单位向量，所以我们称这堆向量 $q_1, q_2, \dots, q_n$ 是标准正交向量。

标准正交矩阵

现在把这些标准正交向量放入矩阵中：

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]$$
$$Q^T Q = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{bmatrix} [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = I$$

$Q^T Q$ 最终得到了一个单位矩阵，但 Q 本身未必是方阵。 Q 的列是标准正交的， Q 因此被称为标准正交矩阵；当 Q 是方阵时，简称为正交矩阵，此时说明 Q 和 Q^T 互为逆矩阵：

$$Q^T = Q^{-1}$$
$$Q^T Q = I = Q Q^T$$

下面的 Q 就是一个正交矩阵：

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$Q^T Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = I$$

随笔分类 (211)
★★资源下载★★(1)
Java并发编程(1)
程序员的数学(24)
单变量微积分(31)
多变量微积分(24)
概率(24)
机器学习(27)
软件设计(1)
数据分析(6)
数据结构与算法(27)
随笔(5)
线性代数(34)
项目管理(2)
转载(4)
随笔档案 (205)
2021年2月(1)
2020年3月(2)
2020年2月(6)
2020年1月(4)
2019年12月(7)
2019年11月(15)
2019年9月(3)
2019年8月(6)
2019年7月(1)
2019年6月(8)
2019年5月(3)
2019年4月(5)
2019年3月(7)
2019年2月(3)
2019年1月(7)
更多
阅读排行榜
1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)
评论排行榜
1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)
推荐排行榜
1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)
最新评论
1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积) 如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90° --猫猫猫猫大人

可以将Q的三个列看作直角坐标系的三个轴，它们两两垂直。

再举个例子：

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ Q^T Q &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} \\ &= I \end{aligned}$$

一个方阵的列是正交的并不意味着方阵是正交矩阵，比如下面这个：

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ Q^T Q &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

虽然这个矩阵不是正交矩阵， $Q^T Q$ 的结果却与单位矩阵神似，我们可以对Q做点处理让它变成正交矩阵。当Q是正交矩阵时，Q的每一个列的模长都应该是1，因此可以这样处理：

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

这样就变成正交矩阵了。类似的还有下面这个：

$$Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

正交矩阵与投影矩阵

如果Q是标准正交矩阵，那么Q在列空间上的投影矩阵将得到简化：

$$P = Q \hat{x} = Q(Q^T Q)^{-1} Q^T = Q Q^T$$

更进一步，如果Q是方阵：

$$Q^T = Q^{-1}$$

$$P = Q Q^T = I$$

如果对 $Q Q^T$ 再次投影（这里并未强调Q是方阵）：

$$P^{(2)} = (Q Q^T)[(Q Q^T)^T (Q Q^T)]^{-1} (Q Q^T)$$

其中：

$$\begin{aligned} (Q Q^T)^T (Q Q^T) &= (Q^T{}^T Q^T) (Q Q^T) = (Q Q^T) (Q Q^T) = Q (Q^T Q) Q^T \\ &= Q Q^T \end{aligned}$$

$$P^{(2)} = (Q Q^T)[Q Q^T]^{-1} (Q Q^T) = Q Q^T$$

在求解 $Ax = b$ 时，如果A是标准正交矩阵，它的好处就是不需要计算逆矩阵：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\hat{x} = (Q^T Q)^{-1} Q^T b = Q^T b$$

这也意味着x的一个分量等于 Q^T 一行（或Q的一列的转置）与b的点积：

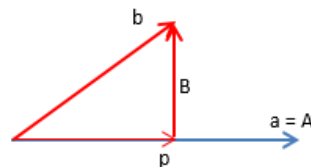
$$\hat{x}_i = q_i^T b$$

这也是很重要的一个式子：如果已知标准正交基，在第i个基方向上的投影就等于 $q_i^T b$

格拉姆-施密特正交化

既然正交化这么好，有没有什么方法能使矩阵标准正交化呢？当然有，这就是格拉姆-施密特（Gram-Schmidt）正交化。

假设有两个线性无关的向量a和b，现在标准正交化这两个向量，让它们变成 q_1 和 q_2 。首先保持a不变让向量 $A = a$ ，接下来要寻找到另一个向量B，使得 $A \perp B$ 。p是b在a上的投影，B就相当于b的误差向量：



根据上一章的知识，p相当于a放缩了x倍，在一维空间内，x是一个标量：

$$x = \frac{a^T b}{a^T a}$$

$$p = ax = xa = \frac{a^T b}{a^T a} a = \frac{A^T b}{A^T A} A$$

$$B = b - p = b - \frac{A^T b}{A^T A} A$$

这相当于B是b减去b在a上的投影，B是b和A的线性组合。

最后将A变成指向A方向的单位向量，B变成指向B方向的单位向量：

$$q_1 = \frac{A}{\|A\|}, \quad q_2 = \frac{B}{\|B\|}$$

这就是格拉姆-施密特正交化方法。

如果还有一个向量c，由c到 q_3 的转换：

$$C = c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B$$

$$q_3 = \frac{C}{\|C\|}$$

代入几个数值看看：

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

验证:

$$A^T B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow A \perp B$$

$$q_1 = \frac{A}{\|A\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \frac{B}{\|B\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_1 \quad q_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

这个标准正交矩阵Q是通过下面的原始矩阵得到的:

$$A = [a \quad b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A的列空间和B的列空间相同，能够张成一个二维空间的平面。a和b是A的列空间的一组基，但这组基“不够好”，我们还想进一步让这组基的向量两两正交，并且都是单位向量，这就得到了 q_1 和 q_2 。

格拉姆-施密特表达

如同 $A = LU$ 一样，A可以分解成一个正交矩阵和一个上三角矩阵的乘积， $A = QR$ ，这里A是原始矩阵，各列线性无关，Q是标准正交矩阵，R是上三角矩阵。

假设原始矩阵A有三个列向量：

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$$

按照格拉姆-施密特正交化方法转换后，得到 q_1, q_2, q_3 ：

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]$$

$$A = QR$$

$$Q^T A = \underbrace{Q^T Q}_I R = R$$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{bmatrix} [a_1 \quad a_2 \quad a_n]$$

q 和 a 本身也是列向量，得出结果并不那么直观，可以展开表达：

$$q_1 = \begin{bmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{bmatrix}, q_2 = \begin{bmatrix} q_{21} \\ q_{22} \\ q_{23} \end{bmatrix}, q_3 = \begin{bmatrix} q_{31} \\ q_{32} \\ q_{33} \end{bmatrix}, \quad Q^T = \begin{bmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ q_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^T q_1 & a_2^T q_1 & a_3^T q_1 \\ a_1^T q_2 & a_2^T q_2 & a_3^T q_2 \\ a_1^T q_3 & a_2^T q_3 & a_3^T q_3 \end{bmatrix}$$

由于 $q_1^T q_2 = 0$, q_1 只是 a_1 的单位化, 所以 a_1^T 与 q_2 也正交, $a_1^T q_2 = 0$; 同理, $a_1^T q_3 = 0$. q_2 是 a_2 和 q_1 的线性组合, 转置后, q_2^T 是 a_2^T 和 q_1^T 的线性组合, 这相当于:

$$q_2^T = t_1 a_2^T + t_2 q_1^T$$

如果 $t_1 = 0$, 相当于 q_1 和 q_2 是线性相关的, 这就不符合标准正交向量的前提, 所以一定有 $t_1 \neq 0$:

$$q_2^T q_3 = (t_1 a_2^T + t_2 q_1^T) q_3 = t_1 a_2^T q_3 + t_2 q_1^T q_3 = t_1 a_2^T q_3 = 0$$

$$\Rightarrow a_2^T q_3 = 0$$

$a_2^T q_2$ 和 $a_3^T q_3$ 不为0, 如果是0, 就没必要正交化了。 q_3 是 a_3 和 q_1 、 q_2 的线性组合, 转置后, q_3^T 是 a_3^T 和 q_1^T 、 q_2^T 的线性组合, 这相当于:

$$q_3^T = t_1 a_3^T + t_2 q_1^T + t_3 q_2^T$$

$$q_3^T q_2 = (t_1 a_3^T + t_2 q_1^T + t_3 q_2^T) q_2 = t_1 a_3^T q_2 + t_2 \underbrace{q_1^T q_2}_0 + t_3 q_2^T q_2$$

$$= t_1 a_3^T q_2 + t_3 q_2^T q_2$$

$$\Rightarrow t_1 a_3^T q_2 = -t_3 q_2^T q_2 \neq 0$$

$$R = Q^T A = \begin{bmatrix} a_1^T q_1 & a_2^T q_1 & a_3^T q_1 \\ 0 & a_2^T q_2 & a_3^T q_2 \\ 0 & 0 & a_3^T q_3 \end{bmatrix}$$

示例

求矩阵A的QR分解。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{let } a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = [a \quad b \quad c]$$

$$A = a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = b - \frac{A^T b}{A^T A} A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} C &= c - \frac{A^T c}{A^T A} A - \frac{B^T c}{B^T B} B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{7}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$q_1 = \frac{A}{\|A\|} = \frac{\langle 1, 2, 1 \rangle}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_2 = \frac{B}{\|B\|} = \frac{\langle 1, -1, 1 \rangle}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$q_3 = \frac{C}{\|C\|} = \frac{\langle \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2} \rangle}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (0)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$Q = [q_1 \quad q_2 \quad q_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} a_1^T q_1 & a_2^T q_1 & a_3^T q_1 \\ 0 & a_2^T q_2 & a_3^T q_2 \\ 0 & 0 & a_3^T q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & \frac{7}{\sqrt{6}} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [线性代数](#)

标签: [格拉姆-施密特正交化](#), [Gram-Schmidt](#), [QR分解](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

1

[推荐](#)

0

[反对](#)

« 上一篇: [寻找“最好” \(8\) ——牛顿法](#)

» 下一篇: [线性代数笔记20——行列式和代数余子式](#)

posted on 2018-11-20 13:58 [我是8位的](#) 阅读(15985) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
- 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型

- Android 再推 “杀手级” 功能，可回收 60% 存储空间
- 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes